Le thème de la conférence de Christophe Mora est l’application des résultats d’une branche des mathématiques, savoir la topologie, à la caractérisation de certains états ou phénomènes physiques ; plus spécialement, dans la ligne des travaux de son laboratoire, C. Mora centre son exposé sur la caractérisation topologique du comportement des électrons dans les solides, dans des conditions où les effets quantiques ne peuvent plus être négligés.

Dans une première partie, C. Mora nous rappelle ce qu’est la topologie, savoir « l’étude des déformations *continues* d’objets » pour y identifier des caractères mesurables dont les valeurs restent les mêmes lors de ces déformations. Les différentes valeurs possibles de ces caractères, lorsqu’elles forment un ensemble discret, permettent alors d’effectuer des classifications, de répartir ces objets en un nombre fini ou dénombrable de classes à l’intérieur desquelles ils peuvent se transformer les uns vers les autres par des déformations continues, le passage d’une classe à une autre exigeant au contraire une « rupture » dans la forme, un changement de structure.

Après avoir donné l’exemple du ruban de Moebius, pour illustrer la différence de structure d’avec un ruban ordinaire enroulé sans torsion, C. Mora donne l’exemple d’un invariant numérique calculable sur des surfaces fermées, et permettant donc de classer ces surfaces. Il restreint son exemple aux surfaces *compactes*, c.-à-d. sans bord, et *orientables*, c.-.à.-d. pour lesquelles peut se définir un intérieur et un extérieur, autrement dit qui délimitent un espace fermé. Telles sont les sphères, les tores, etc., et toutes surfaces obtenues à partir de ces dernières par déformations continues. Pour de telles surfaces, cet invariant – appelé genre et noté *g* mobilise l’intégrale prise sur la surface de la courbure en chaque point. *Le théorème de Gauss-Bonnet* montre que *g* , quelle que soit la surface de la classe générale considérée, ne peut prendre que des valeurs entières 0 (la sphère et ses déformations continues), 1 (le tore..) etc. Une diapositive illustre ainsi différents cas.

Cette introduction mathématique étant faite, le conférencier aborde une autre notion à l’interface entre Mathématique et Physique, la notion de phase géométrique, en référence aux travaux du physicien anglais Michael Berry. Le lecteur trouvera dans le numéro de décembre 1988 de la revue *Scientific American* une introduction très pédagogique, par M. Berry lui-même, de cette notion et de ses différentes applications tant en physique quantique que classique. Résumons en ici à notre manière, de façon simplifiée, les fondements, pour éclairer les diapositives présentées par C. Mora.

Soit donc un système affecté d’un phénomène descriptible par une certaine fonction périodique, donc associé à une amplitude *A* et une période *T.* Ce système est supposé en équilibre avec un environnement caractérisé de son côté par un ensemble de grandeurs *(u,v,w),* ensemble formant *l’espace des paramètres* du système. La phase géométrique s’introduit lorsqu’on modifie progressivement l’environnement, c.-à-d. les valeurs *u,v,w* *, en restant sur une certaine surface f(u,v,w) = 0 et en revenant à l’état initial* – donc au bout d’une boucle accomplie sur une durée *D.* De plus, ce déplacement dans l’espace des paramètres est effectué suffisamment lentement pour que le système reste en équilibre avec son environnement – modification dite « adiabatique » - et qu’en conséquence le phénomène qui l’affecte reste descriptible par une fonction périodique de forme identique et de même période. Si la durée de la boucle est un multiple exact de la période, on s’attend à retrouver obligatoirement en final le système exactement dans la même « position », c.-à-d. dans une phase de son cycle périodique identique à celle qu’il avait au départ. *En fait il n’en est rien* ; *Dès lors qu’il existe une courbure* sur la surface f(u,v,w) =0, les expériences montrent qu’il y aura un *décalage de phase*, c’est la phase géométrique. La théorie montre alors que ce décalage est uniquement fonction de l’aire de la portion de surface circonscrite sur *f(u,x,w)=*0 par la boucle suivie lors du déplacement adiabatique.

C. Mora, après avoir exposé ces principes, donne un exemple ressortant de la mécanique classique, celui du pendule de Foucault. Un tel système est caractérisé par l’amplitude d’oscillation, la période et l’angle  que fait le plan d’oscillation avec un plan de référence lié au laboratoire. On sait que 24 heures après, lorsque le crochet du pendule est revenu dans la même position d’un référentiel « fixe », l’angle  n’a pas une valeur identique à celle qu’il avait 24 heures avant ; il y a un décalage proportionnel à l’aire de la surface délimitée par le trajet du laboratoire sur une sphère fixe enveloppant la surface terrestre. A priori il n’est pas complètement évident de comprendre pourquoi ce décalage peut être interprété comme un décalage de phase et donc comme une phase géométrique, mais cela est bien expliqué dans l’article cité plus haut ; et cette explication fournit en plus une analogie parlante avec nombre d’expériences faites en physique quantique mettant en œuvre des mesures de spin de particules sur un axe de symétrie et montrant le décalage lorsqu’on fait tourner progressivement cet axe pour revenir à sa direction initiale.

C. Mora donne ensuite un exemple pris en physique quantique, l’effet Aharonov-Bohm, déjà évoqué par Gilles Montambaux dans une conférence précédente. Cet effet est celui d’un décalage de phase introduit, sur les fonctions d’onde de particules chargées, par un champ magnétique dont les lignes de champ sont confinées dans un tube, et donc que ces particules chargées, se déplaçant à l’extérieur du tube, ne rencontrent pas.

Ces préliminaires théoriques étant avancés, C. Mora passe à la Physique, avec l’objectif de montrer l’utilisation des notions précédentes dans l’analyse de phénomènes affectant les électrons dans les solides cristallins, en terminant par l’effet Hall Quantique.

Le conférencier rappelle d’abord la structure des niveaux d’énergie électronique dans les réseaux cristallins (bandes de valence et bandes de conduction, niveau de Fermi), son lien avec les niveaux d’énergie des atomes isolés et son rôle dans les propriétés conductrices de ces réseaux (Conducteurs, semi-conducteurs, isolants). Puis il introduit une caractérisation topologique de la structure et donc du comportement de ces réseaux, *celle du nombre de Chern.* Ce nombre se calcule par une intégrale de même forme que celle mobilisée dans le théorème de Gauss Bonnet : l’espace *S* impliqué est l’espace des vecteurs d’ondes ***k*** associés aux fonctions d’ondes des électrons pris dans le potentiel périodique du réseau. Mais la courbure n’est plus la courbure « intrinsèque » de cet espace, mais une courbure « extrinsèque », la courbure de Berry, construite à partir des états d’énergie liés à chaque vecteur d’onde. Le formalisme mathématique sous-jacent est celui de la théorie des fibrés mais n’est pas abordé. C. Mora rappelle à nouveau l’intérêt de ces caractérisations topologiques discrètes, par rapport à des mesures classiques : celui de leur *robustesse* par rapport aux variations de température, ou encore l’existence d’un certain désordre. Et il termine par une application pratique de ces caractérisations, relative au nombre de canaux de conduction à l’interface entre deux isolants.

Enfin l’effet Hall quantique, dont il avait été également question avec Gilles Montambaux. Dans cet effet, la conductance contrôlant les courants de sens opposé apparaissant sur chacun des deux bords d’un conducteur, sous l’effet d’un champ magnétique, est quantifiée par un nombre entier *n* restant le même alors que le champ magnétique varie. C. Mora donne l’interprétation topologique de ces paliers de conductance : *n*, nombre de *canaux de conductance* *élémentaire* $e^{2}/h$, est égal au nombre de Chern associé à des *états de bord* demeurant topologiquement dans la même classe sur une certaine plage de variation du champ.

C. Mora avance enfin d’autres exemples, issus de recherches récentes dans divers domaines (isolants, supraconducteurs), de phénomènes dont l’interprétation se fonde sur des invariants topologiques.

Son exposé nous a fait découvrir un lien entre manifestations mésoscopiques de la physique quantique et la topologie, lien dont il rappelle en conclusion certaines notions clés – courbure, phase géométrique, courbure et phase de Berry, invariants topologiques, effets de bord ; lien que beaucoup d’entre nous ont découvert grâce à lui.

*Le lecteur peut consulter les diapositives de la conférence de Christophe Mora. Pour accéder au fichier concerné,* [*cliquez ici*](https://www.dropbox.com/s/q5cegckfjfq6qak/Expos%C3%A9%20Christophe%20Mora.ppsx?dl=0)*; pour accéder aux séquences audio de chaque diapositive, ouvrir ensuite avec Powerpoint online, puis affichage-mode lecture-lancer le diaporama*

 Résumé rédigé par Jean-Pierre Treuil, AEIS

.